

Eine Lösungstheorie für das quantenmechanische Vier-Körper-Problem

W. BÜTTNER und H. RUDER

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg

(Z. Naturforsch. 24 a, 1163—1171 [1969] ; eingegangen am 17. März 1969)

A system of 4 point masses (without spin) is considered. The potential energy is assumed to be a function of the distances between the particles only. It is possible to express the kinetic energy relative to the center of mass as the kinetic energy of 3 "reduced" masses. The different possibilities for that procedure are discussed for systems with an arbitrary number of particles. The positions of the 3 reduced masses are described by 9 coordinates. 6 of them, the "internal" coordinates, are needed to determine the internal structure of the system, and 3, the "external" coordinates, for its orientation in space. The classical Hamiltonian in such a set of coordinates is derived. In a first step the Hamiltonian is expressed in terms of linear and angular momenta. Then these quantities are determined as functions of the coordinates and the conjugate momenta by infinitesimal transformations. From the classical Hamiltonian we get the quantum mechanical one by the well-known translation rule. It can be expressed in terms of the linear and angular momentum operators quite analogous to the classical case.

For the solution of the time-independent Schrödinger equation the rotational symmetry of the system is used. The wave function is expanded in terms of the eigenfunctions of the total angular momentum. This leads to a system of coupled differential equations for the expansion-coefficients which depend on the 6 internal coordinates only. The further symmetries of the system (reflection and particle exchange) appear in symmetry properties of these functions. Differences and similarities in the solution theory for the 4-body-problem with respect to the 3-body-problem are discussed.

Für die quantenmechanische Behandlung des 3-Körper-Problems ist von RUDER¹ eine Lösungstheorie angegeben worden. Wesentlich war dabei eine spezielle Koordinatenwahl, die zu einer übersichtlichen Zusammenfassung des Hamilton-Operators und zu einer physikalischen Interpretation seiner Bestandteile führte. Dadurch konnten schnell konvergierende Lösungsansätze angegeben werden. Die folgende Arbeit soll untersuchen, wie weit ein analoges Vorgehen bei Systemen mit mehr Teilchen, insbesondere beim 4-Körper-Problem, möglich ist. Es zeigt sich dabei, daß sich eine ganze Reihe von Ergebnissen, wie zum Beispiel die einfache Gewinnung der Hamilton-Funktion und des Hamilton-Operators, sofort für Systeme mit beliebiger Teilchenzahl angeben läßt. Die Lösungstheorie unter Verwendung der Symmetrien des Systems wird dann am 4-Körper-Problem durchgeführt. Die Erweiterungen, die dabei gegenüber dem 3-Körper-Problem notwendig werden, zeigen unmittelbar, wie die Behandlung von Systemen mit mehr Teilchen vorzunehmen ist.

I. Einführung der Koordinaten

Beim quantenmechanischen 4-Körper-Problem gehen wir wie beim quantenmechanischen 3-Körper-

Problem¹ davon aus, daß das Potential nur von den gegenseitigen Abständen der Teilchen abhängt. Wir nehmen wieder folgende Vereinfachung des Hamilton-Operators vor:

a) Wir wählen für die 4 Teilchen mit den Massen m_1, \dots, m_4 12 Koordinaten so, daß 3 davon die Lage des Gesamtschwerpunkts S beschreiben. Damit können wir die Bewegung des Schwerpunkts absepa-

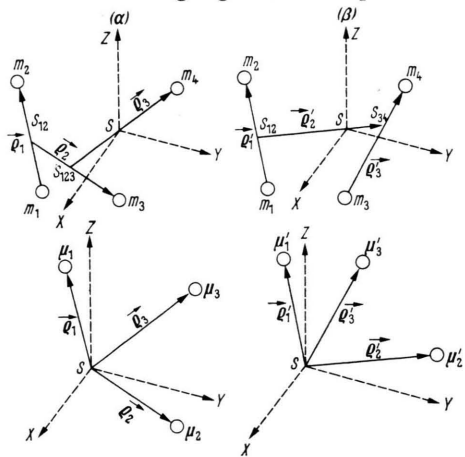


Abb. 1. Reduktionsmöglichkeiten (α) und (β) für das 4-Teilchen-System. S ist der Schwerpunkt des Systems, S₁₂ der Schwerpunkt der Massen m₁ und m₂, S₁₂₃ der Schwerpunkt der Massen m₁, m₂ und m₃ usw.

¹ H. RUDER, Z. Naturforsch. 23 a, 579 [1968].

Sonderdruckanforderungen erbeten an: W. BÜTTNER, Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg, D-8520 Erlangen, Glückstr. 6.

rieren. Wir betrachten ihn im folgenden als ruhend und beschreiben die Bewegung des Systems relativ zu S von einem raumfesten kartesischen Bezugssystem XYZ aus, dessen Ursprung S ist.

b) Wir gehen zum reduzierten System über. Dafür gibt es beim 4-Körper-Problem im Gegensatz zum 3-Körper-Problem zwei prinzipiell verschiedene Möglichkeiten (α) und (β) (siehe Abb. 1).

Für die reduzierten Massen μ_i bzw. μ_i' erhalten wir folgende Ausdrücke:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; & \mu_1' &= \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}; \\ \mu_2 &= \frac{(m_1 + m_2) m_3}{m_1 + m_2 + m_3}; & \mu_2' &= \frac{(m_1 + m_2)(m_3 + m_4)}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}; \\ \mu_3 &= \frac{(m_1 + m_2 + m_3) m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}; & \mu_3' &= \frac{m_3 m_4}{m_3 + m_4}.\end{aligned}$$

Die kinetische Energie des Gesamtsystems hat in beiden Fällen die gleiche Form:

$$T = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i^2 \quad \text{bzw.} \quad T' = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i'}{2} \dot{\mathbf{r}}_i'^2. \quad (1)$$

Bei der Reduktion eines n -Teilchen-Systems ($n > 4$) können wir (α) und (β) je konsequent fortsetzen und erhalten dann die in Abb. 2 angedeuteten Grenzfälle.

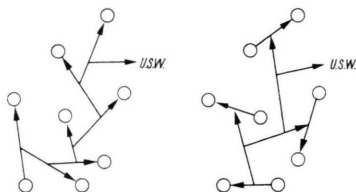


Abb. 2. Reduktionsmöglichkeiten für das n -Teilchen-System.

Dabei ist (α) dadurch gekennzeichnet, daß nur ein Vektor \mathbf{r}_i Abstandsvektor eines Teilchenpaares ist, während im Fall (β) eine Maximalzahl von Vektoren \mathbf{r}_i' Abstandsvektoren von Teilchenpaaren sind. Welches Reduktionsverfahren man in einem speziellen Fall wählen wird, hängt von der Wechselwirkung und von den Verhältnissen der 4 Massen ab. Wenn im System beispielsweise 2 gleiche Teilchen vorhanden sind, wird man so reduzieren, daß einer der Vektoren \mathbf{r}_i Abstandsvektor dieses Teilchenpaares wird, damit sich die inneren Koordinaten bei Teilchenvertauschung möglichst übersichtlich ändern. Genauer wird aus späteren Beispielen ersichtlich.

c) In (b) haben wir dem 4-Teilchen-System ein reduziertes System, bestehend aus 3 reduzierten Massen, zugeordnet. Nun wollen wir die Lage dieser re-

duzierten Massen im raumfesten XYZ -Bezugssystem durch 9 Koordinaten festlegen. 6 (sogen. „innere“) Koordinaten wählen wir so, daß sie eindeutig mit den 6 Teilchenabständen des ursprünglichen 4-Teilchen-Systems verknüpft sind. Das Potential wird dadurch allein eine Funktion dieser inneren Koordinaten. Sie bestimmen die Form des von den 4 Massenpunkten gebildeten Tetraeders. Die restlichen 3 (sogen. „äußeren“) Koordinaten sollen dann die Lage dieses Tetraeders relativ zum raumfesten XYZ -Bezugssystem festlegen.

Zur Definition der äußeren Koordinaten führen wir zusätzlich ein körpergebundenes kartesisches $\xi\eta\zeta$ -Achsenkreuz mit Ursprung S ein. Die ζ -Achse habe die Richtung von \mathbf{p}_1 , die η -Achse die Richtung von $\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$. Als äußere Koordinaten wählen wir die Eulerschen Winkel α, β, γ , welche die gegenseitige Lage von XYZ - und $\xi\eta\zeta$ -Bezugssystem festlegen. Als innere Koordinaten verwenden wir die sphärischen Polarkoordinaten der reduzierten Massen im $\xi\eta\zeta$ -Bezugssystem, nämlich für μ_1 : $(\varrho_1, 0, 0)$, für μ_2 : $(\varrho_2, u, 0)$ und für μ_3 : (ϱ_3, v, δ) (siehe Abb. 3).

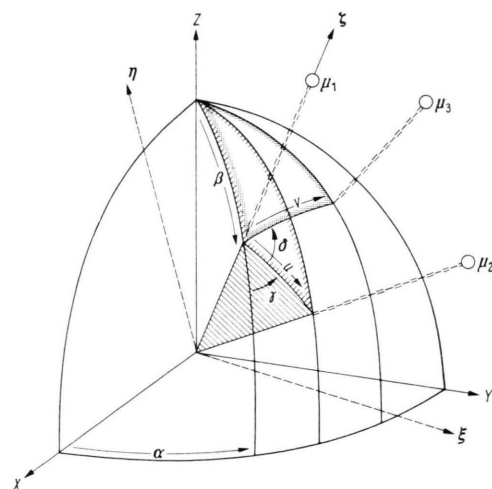


Abb. 3. Koordinaten für das reduzierte 4-Teilchen-System.

Bei Systemen mit mehr als 4 Teilchen wird jede weitere reduzierte Masse μ_i durch sphärische Polarkoordinaten $(\varrho_i, v_i, \delta_i)$ beschrieben.

Es wird später quantenmechanisch von Bedeutung sein, daß bei dieser Koordinatenwahl die Massen μ_1 und μ_2 insgesamt 3 Freiheitsgrade einbüßen und an das körpergebundene Bezugssystem abgeben.

Die Einführung nicht-kartesischer Koordinaten stellt uns nun vor das Problem, die Schrödingergleichung in krummlinigen Koordinaten aufzustellen.

II. Gewinnung des Hamilton-Operators

Prinzipiell könnten wir den Hamilton-Operator eines n -Teilchensystems in beliebigen Koordinaten gewinnen, indem wir von kartesischen Koordinaten ausgehen und die Differentialoperatoren auf die gewünschten Koordinaten umrechnen. Diese Methode war für $n=3$ schon sehr umfangreich und wird für $n \geq 4$ praktisch undurchführbar. Deshalb wurde für $n=3$ folgendermaßen vorgegangen¹:

1. Berechnung der klassischen kinetischen Energie T in kanonisch konjugierten Variablen.

2. Berechnung des Hamilton-Operators aus T mit der Schrödingerschen Übersetzungsvorschrift².

Wenn man zu Punkt 1. die kanonisch konjugierten Impulse nach dem üblichen Verfahren aus der Lagrange-Funktion gewinnen will, so ist dies für $n \geq 4$ ebenfalls mit einem gewaltigen Rechenaufwand verbunden. Wir wählen deshalb einen anderen Weg³ und schreiben die kinetische Energie zunächst in der Form

$$T = \sum_i \left[\frac{p_{\varrho_i}^2}{2\mu_i} + \frac{\mathbf{F}_i^2}{2\mu_i \varrho_i^2} \right]; \quad (2)$$

Hier sind die p_{ϱ_i} bereits die zu den Koordinaten ϱ_i kanonisch konjugierten Impulse, \mathbf{F}_i ist der Drehimpuls der Masse μ_i bezüglich des raumfesten Ursprungs S . Es wurde gezeigt³, wie man die Drehimpulskomponenten bezüglich beliebiger Achsen als Funktionen der oben eingeführten Koordinaten und der dazu kanonisch konjugierten Impulse aus infinitesimalen Drehungen gewinnt. Wir zerlegen hier die Drehimpulse \mathbf{F}_i auf das körpergebundene $\xi\eta\zeta$ -System und erhalten folgende Ergebnisse:

a) Für \mathbf{F}_i ($i \geq 3$) treten in den Drehimpulskomponenten nur „innere“ Variable (Koordinaten und zugehörige kanonisch konjugierte Impulse) auf, da bei infinitesimalen Drehungen dieser Teilchen das $\xi\eta\zeta$ -System nicht mitbewegt wird. Die Komponenten

von \mathbf{F}_i haben bei den von uns gewählten Polarkoordinaten die übliche Gestalt

$$\begin{aligned} F_{i\xi} &= -\sin \delta_i p_{v_i} - \cos \delta_i \cot v_i p_{\delta_i}; \\ F_{i\eta} &= \cos \delta_i p_{v_i} - \sin \delta_i \cot v_i p_{\delta_i}; \\ F_{i\zeta} &= p_{\delta_i}. \end{aligned} \quad (3)$$

b) Bei infinitesimalen Drehungen der reduzierten Masse μ_2 um die η -Achse ändert sich nur die innere Koordinate u , bei Drehungen um die anderen beiden Achsen wird auch das $\xi\eta\zeta$ -System mitbewegt. Deshalb enthält $F_{2\eta}$ nur innere, $F_{2\xi}$ und $F_{2\zeta}$ sowohl innere als auch äußere Variable:

$$\begin{aligned} F_{2\xi} &= -\cot u \left(p_\gamma - \sum_{i \geq 3} p_{\delta_i} \right); \\ F_{2\eta} &= p_u; \\ F_{2\zeta} &= p_\gamma - \sum_{i \geq 3} p_{\delta_i}. \end{aligned} \quad (4)$$

c) Bei Drehungen von μ_1 ändern sich, wie man aus Abb. 3 sofort ersieht, alle Winkelgrößen. Das Ergebnis dieser Drehungen erhalten wir, indem wir zunächst zusammen mit μ_1 auch alle anderen Teilchen (d. h. das Gesamtsystem) drehen und dann die Teilchen μ_2, μ_3, \dots usw. wieder zurückdrehen. An Stelle von \mathbf{F}_1 können wir also schreiben

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_2 - \sum_{i \geq 3} \mathbf{F}_i. \quad (5)$$

Dabei ist \mathbf{F} der Gesamtdrehimpuls des Systems und hängt nur von äußeren Variablen ab. Seine Komponenten haben bei Verwendung Eulerscher Winkel die Gestalt:

$$\begin{aligned} F_\xi &= -\frac{\cos \gamma}{\sin \beta} p_\alpha + \sin \gamma p_\beta + \cot \beta \cos \gamma p_\gamma; \\ F_\eta &= \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} p_\alpha + \cos \gamma p_\beta - \cot \beta \sin \gamma p_\gamma; \\ F_\zeta &= p_\gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Wenn wir nun die unter a), b), c) berechneten Ausdrücke für die Drehimpulskomponenten in

$$\begin{aligned} H = T + V &= \frac{p_{\varrho_1}^2}{2\mu_1} + \frac{1}{2\mu_1 \varrho_1^2} \left[\mathbf{F}^2 + \mathbf{F}_2^2 - 2\mathbf{F} \mathbf{F}_2 + \sum_{i \geq 3} (\mathbf{F}_i^2 - 2\mathbf{F} \mathbf{F}_i + 2\mathbf{F}_2 \mathbf{F}_i) + \sum_{\substack{i,j \geq 3 \\ i \neq j}} 2\mathbf{F}_i \mathbf{F}_j \right] \\ &+ \left(\frac{p_{\varrho_2}^2}{2\mu_2} + \frac{\mathbf{F}_2^2}{2\mu_2 \varrho_2^2} \right) + \sum_{i \geq 3} \left(\frac{p_{\varrho_i}^2}{2\mu_i} + \frac{\mathbf{F}_i^2}{2\mu_i \varrho_i^2} \right) + V(\varrho_1, \dots, \varrho_n, u, v_3, \dots, v_n, \delta_3, \dots, \delta_n) \end{aligned} \quad (7)$$

einsetzen, dann haben wir die klassische Hamilton-Funktion in kanonisch konjugierten Variablen gewonnen.

² E. SCHRÖDINGER, Ann. Phys. **79**, 361 [1926].

Nun wenden wir uns Punkt 2, der Übersetzung der klassischen Hamilton-Funktion in die Quantenmechanik, zu. Zunächst betrachten wir nur die

³ H. NÄPFEL, H. RUDER u. H. VOLZ, Z. Naturforsch. **23a**, 199 [1968].

Terme der Hamilton-Funktion (7), welche \mathbf{F}^2 , \mathbf{F}_i^2 , $\mathbf{F}\mathbf{F}_i$ und $\mathbf{F}_i\mathbf{F}_j$ mit $i, j \geq 3$ enthalten. Das sind gerade diejenigen Drehimpulsprodukte, in denen \mathbf{F}_2 nicht vorkommt, sondern nur der Gesamtdrehimpuls oder Drehimpulse von solchen Teilchen μ_i , welche im *körpergebundenen* System 3 Freiheitsgrade besitzen. Wir können³ zu diesen oben genannten Skalarprodukten die zugehörigen quantenmechanischen Operatoren *ohne* Schrödingersche Übersetzungsvorschrift bestimmen, indem wir einfach in jedem Produkt die einzelnen Vektoren \mathbf{F} bzw. \mathbf{F}_i durch ihre quantenmechanischen Vektoroperatoren \mathbf{L} bzw. \mathbf{L}_i ersetzen. Alle Übergänge der Form $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{L}$ und $\mathbf{F}_i \rightarrow \mathbf{L}_i$ ($i = 1, 2, \dots$) können wir³ nach der Vorschrift $p_q \rightarrow (\hbar/i) \partial/\partial q$ vornehmen, weil die klassischen Drehimpulskomponenten in den Impulsen linear sind.

Daneben enthält die Hamilton-Funktion (7) noch Terme, in denen \mathbf{F}_2 auftritt, nämlich Ausdrücke mit \mathbf{F}_2^2 , $\mathbf{F}\mathbf{F}_2$ und $\mathbf{F}_2\mathbf{F}_i$ ($i \geq 3$). Da μ_2 im körpergebundenen System an Stelle von 3 nur 2 Freiheitsgrade besitzt (wie bereits in I erwähnt), lassen sich diese quadratischen Ausdrücke nicht so einfach³ wie oben in die Quantenmechanik übertragen. Das äußert sich auch darin, daß die Skalarprodukte $\mathbf{L}\mathbf{L}_2$ und $\mathbf{L}_2\mathbf{L}_i$ nicht kommutativ sind und daß außerdem bei \mathbf{L}_2 die Summe der raumfesten Komponentenquadrate $\mathbf{L}_2^2 = L_{2x}^2 + L_{2y}^2 + L_{2z}^2$ verschieden ist von der Summe der körpergebundenen Komponentenquadrate $\tilde{\mathbf{L}}_2^2 = L_{2\xi}^2 + L_{2\eta}^2 + L_{2\zeta}^2$.

Wir übersetzen deshalb diesen Teil der Hamilton-Funktion direkt nach Schrödinger und bauen anschließend den erhaltenen Operator nach dem Muster von (7) wieder aus quantenmechanischen Drehimpulsoperatoren auf. Dabei zeigt sich, daß $\mathbf{F}\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_2\mathbf{F}_i$ und \mathbf{F}_2^2 in $\mathbf{L}\mathbf{L}_2$, $\mathbf{L}_i\mathbf{L}_2$ und \mathbf{L}_2^2 übergehen, wobei gilt

$$\mathbf{L}_2^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \cot u \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{\sin^2 u} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma} - \sum_{i \geq 3} \frac{\partial}{\partial \delta_i} \right)^2 \right]. \quad (8)$$

Die Übersetzung der restlichen Terme der Hamilton-Funktion (7) liefert das von Polarkoordinaten her bekannte Ergebnis:

$$p_{\vartheta_i}^2 \rightarrow -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} + \frac{2}{\vartheta_i} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \right). \quad (9)$$

Insgesamt erhalten wir bei n reduzierten Massen μ_i den Hamilton-Operator (10):

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_1^2} + \frac{2}{\vartheta_1} \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} \right) + \frac{1}{2\mu_1 \vartheta_1^2} \cdot \left[\mathbf{L}^2 + \mathbf{L}_2^2 - 2\mathbf{L}\mathbf{L}_2 + \sum_{i \geq 3} (\mathbf{L}_i^2 - 2\mathbf{L}\mathbf{L}_i + 2\mathbf{L}_i\mathbf{L}_2) + \sum_{\substack{i, j \geq 3 \\ i \neq j}} 2\mathbf{L}_i\mathbf{L}_j \right] - \frac{\hbar^2}{2\mu_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_2^2} + \frac{2}{\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial \vartheta_2} \right) + \frac{\mathbf{L}_2^2}{2\mu_2 \vartheta_2^2} + \sum_{i \geq 3} \left[-\frac{\hbar^2}{2\mu_i} \left(\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i^2} + \frac{2}{\vartheta_i} \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} \right) + \frac{\mathbf{L}_i^2}{2\mu_i \vartheta_i^2} \right] + V. \quad (10)$$

Aus der letzten Summe wurde der Anteil zu Index 2 abgespalten, weil μ_2 eine Sonderrolle spielt und \mathbf{L}_2^2 auch äußere Koordinaten enthält. Wie schon angedeutet, liegt das daran, daß μ_2 im körpergebundenen System einen Freiheitsgrad zu wenig hat. Diese Sonderrolle verschwindet, wenn μ_2 den fehlenden Freiheitsgrad vom $\xi\eta\zeta$ -System übernimmt. Wir erkennen das aus der folgenden Gegenüberstellung:

Bei der bisherigen Koordinatenwahl gilt

$$\begin{aligned} [L_{2x}^2 + L_{2y}^2 + L_{2z}^2] &= [L_{2\xi}^2 + L_{2\eta}^2 + L_{2\zeta}^2] - \hbar^2 \cot u \frac{\partial}{\partial u}; \\ [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2] &= [L_\xi^2 + L_\eta^2 + L_\zeta^2]. \end{aligned} \quad (11)$$

Wenn wir statt dessen ein „teilweise körpergebundenes“ Koordinatensystem so einführen, daß die ξ -Achse immer in der Z - ζ -Ebene liegt, dann hat das $\xi\eta\zeta$ -System die Koordinaten $(\alpha, \beta, 0)$ und μ_2 hat die Koordinaten (ϑ_2, u, γ) , d. h. μ_2 hat vom $\xi\eta\zeta$ -System den Winkelfreiheitsgrad γ übernommen. In diesem Fall erhält man an Stelle von (11) die Beziehungen (12):

$$\begin{aligned} [L_x^2 + L_y^2 + L_z^2] &= [L_\xi^2 + L_\eta^2 + L_\zeta^2] - \hbar^2 \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta}; \\ [L_{2x}^2 + L_{2y}^2 + L_{2z}^2] &= [L_{2\xi}^2 + L_{2\eta}^2 + L_{2\zeta}^2]. \end{aligned} \quad (12)$$

III. Lösungstheorie für das 4-Teilchen-System

Wir suchen die gemeinsamen Eigenfunktionen des Hamilton-Operators (10) und der mit ihm vertauschbaren Operatoren. Das sind bei abstandsabhängigem Potential und bei identischen Teilchen i und k die Operatoren

$$H, \mathbf{L}^2, L_Z, P, E_{ik},$$

wobei $L_Z = (\hbar/i) \partial/\partial \alpha$, P der Paritätsoperator und E_{ik} der entsprechende Teilchenvertauschungsoperator ist. Die zu diesen Operatoren gehörigen Quantenzahlen bezeichnen wir mit

$$E, l, m, \pi, \varepsilon_{ik}.$$

Die Eigenfunktionen Ψ werden wie üblich nach den Darstellungskoeffizienten der Drehgruppe entwickelt und erfüllen damit bereits die Eigenwertgleichungen für L^2 und L_z . Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, mit den $D_{mn}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma)$ von ROSE⁴ zu rechnen. Wir erhalten damit für Ψ :

$$\Psi_{E,m}^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}(\alpha, \beta, \gamma, \varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, v, \delta) \quad (13)$$

$$= \sum_{n=-l}^{+l} \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, v, \delta) D_{mn}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma).$$

Die Entwicklungskoeffizienten $\Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}$ sind nur Funktionen der inneren Koordinaten. Sie haben keinen Index m , weil die inneren Koordinaten sich nicht ändern, wenn man zu einer anderen Richtung der Z-Achse und damit zu einem anderen m übergeht.

Die Eigenfunktionen Ψ müssen nun noch die 3 Eigenwertgleichungen erfüllen:

$$(P - \pi) \Psi = 0; \quad (14)$$

$$(E_{ik} - \varepsilon_{ik}) \Psi = 0; \quad (15)$$

$$(H - E) \Psi = 0. \quad (16)$$

Da die $D_{mn}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma)$ bekannt sind, erhalten wir aus (14), (15), (16) Bedingungsgleichungen für die unbekannten Funktionen $\Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}$.

Zu Gleichung (14):

Zur Auswertung von (14) benötigen wir die Wirkung der Paritäts-Operation auf die Koordinaten. An Hand von Abb. 3 erhält man das Ergebnis:

$$\alpha \rightarrow \pi + \alpha; \quad \beta \rightarrow \pi - \beta; \quad \gamma \rightarrow \pi - \gamma; \quad (17)$$

$$\varrho_i \rightarrow \varrho_i \quad (i=1, 2, 3); \quad u \rightarrow u; \quad v \rightarrow v; \quad \delta \rightarrow 2\pi - \delta.$$

Diese Beziehungen lassen sich sofort auf ($n > 4$) Teilchen erweitern:

$$\varrho_i \rightarrow \varrho_i; \quad v_i \rightarrow v_i; \quad \delta_i \rightarrow 2\pi - \delta_i \quad (i > 3). \quad (18)$$

Wie man sieht, wirkt die Paritäts-Operation beim 3-Teilchen-System nur auf äußere Koordinaten, vom 4-Teilchen-System ab aber auch auf innere Koordinaten. Dadurch ergeben sich wichtige Unterschiede zwischen der Lösungstheorie des 3-Körper-Problems und derjenigen für das ($n \geq 4$)-Körperproblem.

Aus (17) folgt für die Wirkung des Paritätsoperators auf die Funktionen D_{mn}^{l*} :

$$P D_{mn}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma) = D_{mn}^{l*}(\pi + \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma)$$

$$= (-1)^{l+n} D_{m-n}^{l*}(\alpha, \beta, \gamma). \quad (19)$$

Das liefert, in (14) eingesetzt, für die Funktionen $\Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}$ die folgenden Bedingungsgleichungen:

$$P \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}(\dots, \delta_i) = \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}(\dots, 2\pi - \delta_i)$$

$$= \pi(-1)^{l+n} \Phi_{-n}^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}(\dots, \delta_i); \quad (20)$$

$$(n = 0, \pm 1, \dots, \pm l).$$

Zu Gleichung (15):

Die Wirkung der Teilchenvertauschung auf die Koordinaten können wir nicht für alle Teilchenpaare eines n -Teilchen-Systems angeben. Es hängt nämlich von der gewählten Reduktion ab, welche Teilchenvertauschungen zu geometrisch überschaubaren Koordinatenänderungen führen. Wenn wir für das 4-Teilchen-System beispielsweise die Reduktion nach Abb. 1 β vornehmen, dann sind nur die Vertauschungen E_{12} und E_{34} geeignet. Wir erhalten für diesen Fall das Ergebnis:

für E_{12} :

$$\varrho_i \rightarrow \varrho_i \quad (i=1, 2, 3); \quad \alpha \rightarrow \pi + \alpha; \quad \beta \rightarrow \pi - \beta; \quad \gamma \rightarrow 2\pi - \gamma;$$

$$u \rightarrow \pi - u; \quad v \rightarrow \pi - v; \quad \delta \rightarrow 2\pi - \delta; \quad (21)$$

für E_{34} :

$$\varrho_i \rightarrow \varrho_i \quad (i=1, 2, 3); \quad \alpha \rightarrow \alpha; \quad \beta \rightarrow \beta; \quad \gamma \rightarrow \gamma;$$

$$u \rightarrow u; \quad v \rightarrow \pi - v; \quad \delta \rightarrow \pi + \delta. \quad (22)$$

Damit kann man, analog wie im vorangehenden Abschnitt, für die Funktionen $\Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{ik}}$ Bedingungsgleichungen ableiten:

$$E_{12} \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{12}}(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 u v \delta) = \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{12}}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3,$$

$$\pi - u, \pi - v, 2\pi - \delta)$$

$$= \varepsilon_{12}(-1)^l \Phi_{-n}^{l,\pi,\varepsilon_{12}}(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 u v \delta); \quad (23)$$

$$E_{34} \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{34}}(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 u v \delta)$$

$$= \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{34}}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, \pi - v, \pi + \delta) \quad (24)$$

$$= \varepsilon_{34} \Phi_n^{l,\pi,\varepsilon_{34}}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, v, \delta).$$

Zu Gleichung (16):

Zur Auswertung von (16) ist es vorteilhaft, die im Hamilton-Operator (10) auftretenden Operatoren zu Ausdrücken zusammenzufassen, denen einfach anzusehen ist, wie sie die Funktionen D_{mn}^{l*} in Linearkombinationen von D_{mn}^{l*} überführen. Wir benutzen dazu die folgenden Beziehungen:

$$\mathbf{L} \mathbf{L}_2 = L_z L_{2z} + \frac{1}{2} (L_+ L_{2-} + L_- L_{2+});$$

$$\mathbf{L} \mathbf{L}_3 = L_z L_{3z} + \frac{1}{2} (L_+ L_{3-} + L_- L_{3+});$$

$$L_{2z} = -\cot u (L_z - L_{3z});$$

$$L_{2z} = L_z - L_{3z}. \quad (25)$$

Wenn wir diesen umgeformten Hamilton-Operator in (16) auf den Lösungsansatz (13) wirken lassen

⁴ M. E. ROSE, Elementary Theory of Angular Momentum, Wiley, New York 1966.

und die lineare Unabhängigkeit der D_{mn}^{l*} berücksichtigen, erhalten wir für die Funktionen $\Phi_n^{l\pi\epsilon_{ik}}$ das Diff.-Gl.-System:

$$a_n^l \Phi_n^{l\pi\epsilon_{ik}} + b_{n+1}^l \Phi_{n+1}^{l\pi\epsilon_{ik}} + c_{n-1}^l \Phi_{n-1}^{l\pi\epsilon_{ik}} = 0 \quad (26)$$

$$(-l \leq n \leq +l)$$

mit

$$a_n^l = V - E - \sum_{i=1}^3 \frac{\hbar^2}{2\mu_i} [\varrho_i] + \frac{\hbar^2}{2\mu_1 \varrho_1^2} [l(l+1) - 2n^2]$$

$$+ \frac{1}{2\mu_1 \varrho_1^2} [L_2^2(n) + L_3^2 + L_{3+} + L_{2-}(n)$$

$$+ L_{3-} - L_{2+}(n) + 2\hbar n L_{3z} - 2L_{3z}^2] \quad (27)$$

$$+ \frac{1}{2\mu_2 \varrho_2^2} L_2^2(n) + \frac{1}{2\mu_3 \varrho_3^2} L_3^2;$$

$$b_n^l = \frac{-\hbar[l, n]}{2\mu_1 \varrho_1^2} (L_{2-}(n) + L_{3-});$$

$$c_n^l = \frac{-\hbar[l, -n]}{2\mu_1 \varrho_1^2} (L_{2+}(n) + L_{3+}).$$

In (27) wurden folgende Abkürzungen verwendet:

$$[\varrho_i] = \frac{\partial^2}{\partial \varrho_i^2} + \frac{2}{\varrho_i} \frac{\partial}{\partial \varrho_i};$$

$$[l, n] = \sqrt{(l+n)(l-n+1)}.$$

Der Operator $L_2^2(n)$ geht aus L_2^2 durch die Ersetzung $(\hbar/i) \partial/\partial \gamma \rightarrow n\hbar$ hervor. Analoges gilt für die Operatoren $L_{2\pm}(n)$.

Das Diff.-Gl.-System (26) ist unter den Nebenbedingungen (20) und, falls Teilchen m_1 und m_2 bzw. Teilchen m_3 und m_4 gleich sind, unter den Nebenbedingungen (23) bzw. (24) zu lösen. Um es

zu vereinfachen, verwenden wir folgende Eigenschaften der Operatoren (27):

$$a_{-n}^l = a_n^{l*}; \quad b_{-n}^l = -c_n^{l*}. \quad (28)$$

Nun ersetzen wir in den letzten $(l+1)$ Gleichungen des Diff.-Gl.-Systems (26) die Operatoren $a_{-n}^l, b_{-n}^l, c_{-n}^l$ mit Hilfe von (28) durch die Operatoren $a_n^{l*}, -c_n^{l*}, -b_n^{l*}$ und bilden dann das Konjugiert-Komplexe dieser Gleichungen. Damit erhalten wir an Stelle von (26):

$$a_n^l \Phi_n^l + b_{n+1}^l \Phi_{n+1}^l + c_{n-1}^l \Phi_{n-1}^l = 0; \quad (n=1, \dots, l)$$

$$a_0^l \Phi_0^{l*} - b_1^{l*} \Phi_{-1}^{l*} + b_1^{l*} \Phi_1^{l*} = 0; \quad (29)$$

$$a_n^l \Phi_{-n}^{l*} - b_{n+1}^l \Phi_{-n-1}^{l*} - c_{n-1}^l \Phi_{-n+1}^{l*} = 0;$$

$$(n=1, \dots, l)$$

Das Diff.-Gl.-System (29) läßt sich auf $l+1$ Gleichungen reduzieren, wenn wir die Lösung so wählen, daß gilt:

$$\Phi_n^l = (-1)^n \Phi_{-n}^{l*}. \quad (30)$$

In diesen $(l+1)$ Gleichungen führen wir nun Bezeichnungen für die Real- und Imaginärteile der komplexen Funktionen und Operatoren ein:

$$a_n^l = a_n^{lr} + i a_n^{li}$$

$$(\text{analog für } b_n^l \text{ und } c_n^l); \quad (31)$$

$$\Phi_n^l = \Phi_n^{lr} + i \Phi_n^{li}.$$

Dann setzen wir Real- und Imaginärteile jeder Gleichung gleich Null und erhalten das folgende $(2l+1)$ -zeitige Diff.-Gl.-System für die $2l+1$ unbekannten, jetzt reellen, Funktionen $\Phi_0^l, \dots, \Phi_n^{lr}, \Phi_n^{li}, \dots, \Phi_l^{lr}, \Phi_l^{li}$:

$$a_n^{lr} \Phi_n^{lr} + b_{n+1}^{lr} \Phi_{n+1}^{lr} + c_{n-1}^{lr} \Phi_{n-1}^{lr} - a_n^{li} \Phi_n^{li} - b_{n+1}^{li} \Phi_{n+1}^{li} - c_{n-1}^{li} \Phi_{n-1}^{li} = 0; \quad (n=1, \dots, l)$$

$$\frac{1}{2} a_0^{li} \Phi_0^{li} + b_1^{li} \Phi_1^{li} - b_1^{li} \Phi_1^{li} = 0; \quad (32)$$

$$a_n^{lr} \Phi_n^{li} + b_{n+1}^{lr} \Phi_{n+1}^{li} + c_{n-1}^{lr} \Phi_{n-1}^{li} + a_n^{li} \Phi_n^{lr} + b_{n+1}^{li} \Phi_{n+1}^{lr} + c_{n-1}^{li} \Phi_{n-1}^{lr} = 0; \quad (n=1, \dots, l).$$

Wir haben das Diff.-Gl.-System (26) gewonnen, indem wir in die Schrödinger-Gleichung (16) für Ψ den Ansatz (13) einsetzen. Wir stellen fest, daß sich das Diff.-Gl.-System (32) ebenfalls direkt aus der Schrödinger-Gleichung (16) ergibt, wenn wir für Ψ den Ansatz

$$l \text{ gerade:}$$

$$\Psi_m^l = \Phi_0^l \mathcal{L}_{m0}^{l+} + \sum_{n=1}^l [(\sqrt{2} \Phi_n^{lr}) \mathcal{L}_{mn}^{l+} + (i\sqrt{2} \Phi_n^{li}) \mathcal{L}_{mn}^{l-}];$$

$$l \text{ ungerade:} \quad (33)$$

$$\Psi_m^l = \Phi_0^l \mathcal{L}_{m0}^{l-} + \sum_{n=1}^l [(i\sqrt{2} \Phi_n^{li}) \mathcal{L}_{mn}^{l+} + (\sqrt{2} \Phi_n^{lr}) \mathcal{L}_{mn}^{l-}];$$

verwenden, wobei die Funktionen $\mathcal{L}_{mn}^{l\pm}$ wie bei RUDER¹ definiert sind.

Nun wollen wir die Gleichungen (20), (23), (24) in Bedingungsgleichungen für die Funktionen Φ_n^{lr} und Φ_n^{li} umformen. Jeder der Ansätze (33) hat die Parität π , wenn gilt:

$$P \Phi_n^{lr} = \pi (-1)^l \Phi_n^{lr};$$

$$P \Phi_n^{li} = -\pi (-1)^l \Phi_n^{li}. \quad (34)$$

Beim 3-Teilchen-Problem ist $P \Phi_n^{lr} = \Phi_n^{lr}$ und $P \Phi_n^{li} = \Phi_n^{li}$, da die Paritätsoperation hier nicht auf innere Koordinaten wirkt. Dann folgt aber aus (34), daß bei gegebenen Werten π, l entweder alle Funk-

tionen Φ_n^{lr} oder alle Funktionen Φ_n^{li} verschwinden und daß sich die Wellenfunktion (33) folgendermaßen reduziert:

l gerade:

$$\Psi_m^{l+} = \Phi_0^l \mathcal{L}_{m0}^{l+} + \sum_{n=1}^l (\sqrt{2} \Phi_n^{lr}) \mathcal{L}_{mn}^{l+};$$

$$\Psi_m^{l-} = \sum_{n=1}^l (i \sqrt{2} \Phi_n^{li}) \mathcal{L}_{mn}^{l-};$$

l ungerade: (35)

$$\Psi_m^{l+} = \sum_{n=1}^l (i \sqrt{2} \Phi_n^{li}) \mathcal{L}_{mn}^{l+};$$

$$\Psi_m^{l-} = \Phi_0^l \mathcal{L}_{m0}^{l-} + \sum_{n=1}^l (\sqrt{2} \Phi_n^{lr}) \mathcal{L}_{mn}^{l-}.$$

Demgegenüber wirkt beim $(n \geq 4)$ -Teilchen-Problem die Paritäts-Operation auf die inneren Koordinaten δ_i . Die Gln. (34) lauten hier:

$$\begin{aligned} P \Phi_n^{lr}(\dots, \delta_i) &= \Phi_n^{lr}(\dots, 2\pi - \delta_i) \\ &= \pi(-1)^l \Phi_n^{lr}(\dots, \delta_i); \\ P \Phi_n^{li}(\dots, \delta_i) &= \Phi_n^{li}(\dots, 2\pi - \delta_i) \\ &= -\pi(-1)^l \Phi_n^{li}(\dots, \delta_i). \end{aligned} \quad (36)$$

Aus (36) folgt jetzt nicht mehr das Verschwinden der Funktionen Φ_n^{lr} oder der Φ_n^{li} und damit auch nicht die Reduktion des Ansatzes (33), sondern nur noch Symmetrieeigenschaften der Funktionen $\Phi_n^{lr}(\dots, \delta_i)$ und $\Phi_n^{li}(\dots, \delta_i)$ bezüglich der Transformation $\delta_i \rightarrow 2\pi - \delta_i$. Wir werden aber im nächsten Abschnitt notwendige und hinreichende Bedingungen dafür suchen, daß auch 4-Teilchen-Zustände mit der verkürzten Wellenfunktion (35) beschrieben werden können. Zuvor wollen wir noch kurz angeben, was die Bedingungsgleichungen (23) und (24) für die Funktionen Φ_n^{lr} und Φ_n^{li} aussagen:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{lr}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \pi - u, \pi - v, \pi - \delta) &= \varepsilon_{12}(-1)^l \Phi_n^{lr}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, v, \delta); \\ \Phi_n^{li}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \pi - u, \pi - v, \pi - \delta) &= -\varepsilon_{12}(-1)^l \Phi_n^{li}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, v, \delta); \\ \Phi_n^{lr}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, \pi - v, \pi + \delta) &= \varepsilon_{34} \Phi_n^{lr}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, v, \delta); \\ \Phi_n^{li}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, \pi - v, \pi + \delta) &= \varepsilon_{34} \Phi_n^{li}(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, u, v, \delta). \end{aligned} \quad (37)$$

4-Teilchen-Zustände zur reduzierten Wellenfunktion (35):

In diesem Kapitel kürzen wir den Lösungsansatz (33) für beliebiges l folgendermaßen ab:

$$\Psi = \sum_{n=0}^l (\Phi_n^{l+} \mathcal{L}_{mn}^{l+} + \Phi_n^{l-} \mathcal{L}_{mn}^{l-}). \quad (38)$$

Wenn wir (38) in die Schrödinger-Gleichung einsetzen und dann das Diff.-Gl.-System (32) ableiten wollen, bauen wir zweckmäßigerweise den Hamilton-Operator aus Operatoren auf, welche auf übersichtliche Weise die Funktionen $\mathcal{L}_{mn}^{l\pm}$ in Linearkombinationen von $\mathcal{L}_{mn}^{l\pm'}$ überführen. Wir bezeichnen mit $H^4(\pm \pm)$ den Teil des 4-Teilchen-Hamilton-Operators, durch den die Funktionen \mathcal{L}_{mn}^{l+} (bzw. \mathcal{L}_{mn}^{l-}) nur wieder in Linearkombinationen von \mathcal{L}_{mn}^{l+} (bzw. \mathcal{L}_{mn}^{l-}) umgewandelt werden. Den restlichen H^4 -Operator, der \mathcal{L}_{mn}^{l+} in \mathcal{L}_{mn}^{l-} (und umgekehrt) transformiert, nennen wir $H^4(\pm \mp)$.

Im Falle des 3-Teilchen-Problems gilt

$$H^3 = H^3(\pm \pm).$$

Deshalb genügt ein Ansatz, der wie (35) nur \mathcal{L}_{mn}^{l+} oder nur \mathcal{L}_{mn}^{l-} enthält. Beim 4-Teilchen-Problem jedoch ist $H^4(\pm \mp)$ von Null verschieden. [$H^4(\pm \mp)$ ist gerade der Teil von H^4 , welcher bei der Transformation $\delta \rightarrow 2\pi - \delta$ nicht invariant bleibt.] Deshalb wird im allgemeinen der 3-Teilchen-Ansatz (35) die 4-Teilchen-Schrödinger-Gleichung (39) nicht erfüllen:

$$\begin{aligned} [H^4(\pm \pm) + H^4(\pm \mp)] \sum_n \Phi_n^{l+} \mathcal{L}_{mn}^{l+} \\ = E \sum_n \Phi_n^{l+} \mathcal{L}_{mn}^{l+}. \end{aligned} \quad (39)$$

Wir können aber aus (39) leicht ablesen, daß der verkürzte Ansatz (35) genau dann als Wellenfunktion des 4-Teilchen-Systems in Frage kommt, wenn gilt:

$$\begin{aligned} H^4(\pm \mp) \sum_n \Phi_n^{l+} \mathcal{L}_{mn}^{l+} &= 0 \\ [\text{bzw. } H^4(\pm \mp) \sum_n \Phi_n^{l-} \mathcal{L}_{mn}^{l-} &= 0] \\ \text{für } \Psi &= \sum_n \Phi_n^{l-} \mathcal{L}_{mn}^{l-}. \end{aligned} \quad (40)$$

Gleichung (40) stellt somit eine notwendige und hinreichende Bedingungsgleichung für diejenigen 4-Teilchen-Zustände dar, deren Wellenfunktionen in der Form (35) geschrieben werden können. Wir werden die physikalischen Eigenschaften dieser speziellen 4-Teilchen-Zustände noch diskutieren.

Zuvor wollen wir uns überlegen, wie sich das Diff.-Gl.-System (32) verändert, wenn wir als 4-Teilchen-Wellenfunktion an Stelle von (38) die reduzierte Form (35) verwenden. Falls (40) gilt, entfallen nämlich im Diff.-Gl.-System (32) alle Terme der Operatoren a_n^l, b_n^l, c_n^l , die sich aus $H^4(\pm \mp)$ ableiten. Das sind gerade die Imaginärteile dieser Operatoren. Je nachdem, ob der Ansatz

(35) Funktionen Φ_n^{lr} oder Φ_n^{li} enthält, verbleibt dann eines der beiden Diff.-Gl.-Systeme:

$$a_n^{lr} \Phi_n^{lr} + b_{n+1}^{lr} \Phi_{n+1}^{lr} + c_{n-1}^{lr} \Phi_{n-1}^{lr} = 0; \quad (41 \text{ a})$$

$$\frac{1}{2} a_0^l \Phi_0^l + b_1^l \Phi_1^l = 0; \quad (41 \text{ b})$$

Aus jedem der beiden Diff.-Gl.-Systeme (41) kann eine 4-Teilchen-Wellenfunktion positiver oder negativer Parität bestimmt werden, denn wegen (36) können für die Funktionen Φ_n^{lr} und Φ_n^{li} die folgenden 4 Nebenbedingungen gewählt werden:

$$\begin{aligned} \Phi_n^{lr}(\dots, \delta) &= \pm \Phi_n^{lr}(\dots, 2\pi - \delta), \\ \Phi_n^{li}(\dots, \delta) &= \pm \Phi_n^{li}(\dots, 2\pi - \delta). \end{aligned} \quad (42)$$

Das sind doppelt so viele Möglichkeiten wie beim 3-Teilchen-Problem.

Wir diskutieren nun die physikalischen Eigenschaften derjenigen 4-Teilchen-Zustände, welche die Gl. (40) erfüllen. Dazu schreiben wir $H^4(\pm \mp)$ ausführlich auf:

$$\begin{aligned} H^4(\pm \mp) &= - \left[\frac{1}{\mu_1 \varrho_1^2 \sin^2 u} + \frac{1}{\mu_2 \varrho_2^2 \sin^2 u} \right] L_{3z} L_z \\ &+ \frac{1}{\mu_1 \varrho_1^2} [-\cot u L_{3z} L_z - \cot u L_{3z} L_z] \\ &+ L_{3z} L_z - L_{3z} L_z. \end{aligned} \quad (43)$$

Für endliche reduzierte Massen μ_1 und μ_2 muß Ψ die folgenden Bedingungsgleichungen gleichzeitig erfüllen:

$$\begin{aligned} L_{3z} L_z \Psi &= 0; \\ [-\cot u L_{3z} L_z - \cot u L_{3z} L_z \\ &+ L_{3z} L_z - L_{3z} L_z] \Psi = 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Man sieht, daß dies der Fall ist, wenn gilt:

$$\mathbf{L} \Psi = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad L_3 \Psi = 0.$$

Eine genauere Untersuchung von (44) ergibt sogar, daß das die einzigen Möglichkeiten sind.

Wir geben zu diesen beiden Fällen jeweils die Wellenfunktion und den H^4 -Operator an. Für Zustände mit $l=0$ reduziert sich die Summe im Ansatz (35) auf den einen zu $n=l=0$ gehörenden Summanden. Dieser hängt nicht von α, β, γ ab. Es gilt also:

$$\Psi(l=0) = \Phi(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 u v \delta). \quad (45)$$

Den Hamilton-Operator hierzu erhält man, indem man in (10) alle Terme wegläßt, welche Komponenten von \mathbf{L} enthalten.

Die Wellenfunktion für Zustände mit $l_3=0$ ist wegen $L_3 \Psi = 0$ unabhängig von v und δ . Sie lautet:

tet:

$$\Psi(l_3=0) = \sum_{n=0}^l \Phi_n^{l(\pm)}(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 u) \mathcal{L}_{mn}^{l(\pm)}(\alpha \beta \gamma). \quad (46)$$

Der zugehörige Hamilton-Operator hat die Form

$$\begin{aligned} H^4(l_3=0) &= T^3 - \frac{\hbar^2}{2\mu_3} \left(\frac{\partial^2}{\partial \varrho_3^2} + \frac{2}{\varrho_3} \frac{\partial}{\partial \varrho_3} \right) \\ &+ V(\varrho_1 \varrho_2 \varrho_3 u). \end{aligned} \quad (47)$$

Hier ist T^3 der Operator der kinetischen Energie für 3 Massenpunkte mit den Massen m_1, m_2, m_3 bzw. $m_1, m_2, m_3 + m_4$, je nachdem, ob das 4-Teilchen-System ursprünglich (siehe Abschnitt I) nach der Methode (α) oder (β) reduziert wurde. Wenn wir uns die 4-Teilchen-Zustände mit $l_3=0$ im klassischen Bild veranschaulichen wollen, müssen wir ebenfalls zwischen (α) und (β) unterscheiden. Im Fall (α) schwingen der Massenpunkt m_4 und der gemeinsame Schwerpunkt S_{123} der Massen m_1, m_2, m_3 auf einer raumfesten Geraden, die durch den ruhenden Schwerpunkt S des Gesamtsystems geht. Im Fall (β) bilden m_3 und m_4 eine schwingende Hantel raumfester Richtung.

IV. Anwendungsbeispiele und Ausblick

Wir können die vorliegende 4-Teilchen-Lösungstheorie auf uu-Kerne anwenden, wenn wir diese analog zum Kermanschen Modell aus einem axial- und spiegelungssymmetrischen gg-Rumpf, einem ungepaarten Proton und einem ungepaarten Neutron aufbauen. Den deformierten gg-Rumpf beschreiben wir durch die 2 Massen m_1 und m_2 im Abstand ϱ_1 , wobei wegen der geforderten Spiegelungssymmetrie des gg-Rumpfes $m_1 = m_2$ sein muß. Die aus den 2 Massen gebildete Hantel kann dann kollektive Rumpfanregungen in Form von Rotation und Schwingung modellmäßig erfassen. Die beiden ungepaarten Nukleonen, in unserer bisherigen Theorie die Massenpunkte m_3 und m_4 , sollen sich in einem axialsymmetrischen Potential bewegen, dessen Symmetrieachse mit der des „Rumpfes“, d. h. mit der Richtung von \mathbf{p}_1 , zusammenfällt. Für uu-Kerne mit großer Nukleonenzahl können wir außerdem den Rumpf als unendlich schwer betrachten und daher näherungsweise $m_3/m_1 = 0, m_4/m_1 = 0$ setzen. Dadurch ergeben sich für die Reduktionen (α) und (β) aus Abschnitt I die in Abb. 4 dargestellten Abänderungen.

Der Ausdruck für die kinetische Energie als Funktion der reduzierten Massen μ_i und der Vektoren \mathbf{p}_i

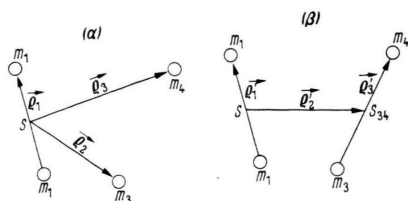


Abb. 4. Reduktionsmöglichkeiten (α) und (β) für das 4-Teilchen-System im Fall $m_1 = m_2 \gg m_3 \approx m_4$.

ist in beiden Fällen der gleiche, obwohl die μ_i und ρ_i nach (α) bzw. (β) verschieden definiert sind. Bei starker Rumpf-Teilchen-Wechselwirkung und schwacher Teilchen-Teilchen-Wechselwirkung wählen wir die Reduktion (α), im umgekehrten Fall die Reduktion (β).

Bei der Behandlung des Diff.-Gl.-Systems (32) gehen wir genauso vor wie in der bereits zitierten Arbeit von RUDER¹. Außerdem sind bei realistischer Beschreibung von uu-Kernen noch die Spins der beiden ungepaarten Nukleonen zu berücksichtigen; wie dies geschehen kann, ist in einer Arbeit von NÄPFEL⁵ untersucht worden.

Herr Professor Dr. H. VOLZ hat diese Arbeit von Anfang an mit Interesse verfolgt. Wir möchten ihm an dieser Stelle für die vielen nützlichen Diskussionen und wertvollen Anregungen herzlich danken.

⁵ H. NÄPFEL, Z. Naturforsch. **23 a**, 562 [1968].

Zur rotatorischen Bewegung eines Systems von n Massenpunkten. II.

H. RUDER und H. VOLZ

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg

(Z. Naturforsch. **24 a**, 1171—1188 [1969]; eingegangen am 10. April 1969)

In part I, the problem of the separation of a collective rotational motion from the internal motion in a system of point masses was discussed. It was shown that in the Hamiltonian $H = H_1 + H_k + H_2$, where H_1 describes the internal, H_2 the collective motion, the coupling term H_k in general cannot be eliminated by any choice of the internal frame of reference. This result applies to classical as well as to quantum mechanics. In this paper, the problem is further discussed on the basis of wave mechanics, especially for the case of the three-body-problem. Starting from the dependence of H_k on the connection of the internal frame with the configuration, we choose this frame in such a way that $H_k \Phi_0 = 0$, where Φ_0 is the separated internal part of the wave function. Our procedure, which we call the method of specific decoupling, ensures that for the considered wave function and the corresponding frame of reference, the internal and collective motions are fully decoupled in that degree of perturbation which corresponds to the concept of rotational energies proportional to L^2 . It turns out that the condition $H_k \Phi_0 = 0$ is equivalent to a minimum principle for $\langle H_2 \rangle$. Thus the frame of reference in question can be found by solution of a differential equation as well as by variational methods. The Eulerian angles of that frame of reference respective to a fixed system of coordinates are the variables which enter the functions $D_{mn}^l(\alpha, \beta, \gamma)$ describing the rotational motion of our system of point masses. In the course of our procedure, we immediately get effective moments of inertia. These are markedly smaller than the normal expectation values. Some simple models are quantitatively discussed. It is shown that the normally defined principal axes of inertia are no suitable starting point for the problem, because their connection with the configuration becomes undefined, when two principal moments are equal.

1. Innere Bewegung, kollektive Bewegung und Kopplungsglieder

Die Behandlung eines Systems von n Massenpunkten, in welchem nur innere Kräfte wirken, läßt sich wegen der Gültigkeit des Schwerpunktssatzes stets zurückführen auf diejenige eines Systems von $n - 1$ „reduzierten“ Massenpunkten, die sich in ge-

wissen, bei der Reduzierung anfallenden Abständen um ein festes Zentrum bewegen (reduziertes System). Die $3n - 3$ Variablen, die dieses reduzierte System beschreiben, lassen sich einteilen in eine Gruppe von $3n - 6$ Variablen, welche die innere Struktur ohne Rücksicht auf die Orientierung des Systems im Raum festlegen, und die wir im folgenden wie in Teil I¹ als „innere“ Variable zusammenfassend mit dem

Sonderdruckanforderungen erbeten an Prof. Dr. H. VOLZ, Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen-Nürnberg, D-8520 Erlangen, Glückstr. 6.

¹ H. RUDER u. H. VOLZ, Z. Naturforsch. **23 a**, 1419 [1968].